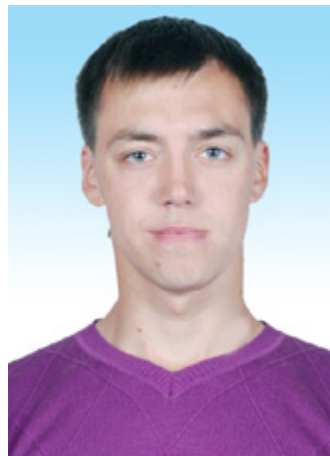


## ОБОБЩЕННОЕ УРАВНЕНИЕ ТЕЧЕНИЯ ФЛЮИДОВ В ПОРИСТЫХ СРЕДАХ



**А.Б. ЗОЛОТУХИН<sup>1,2,3 \*</sup>**,  
доктор технических наук,  
профессор  
РГУ нефти газа (НИУ)  
им. И.М. Губкина  
(г. Москва, Российская Федерация)



**В.Е. ШУЛЕВ<sup>2</sup>**,  
аспирант  
Северного (арктического) федерального  
университета  
им. М.В. Ломоносова  
(г. Москва, Российская Федерация)

<sup>1</sup>Российский государственный университет нефти и газа им. И.М. Губкина,  
119991, Российская Федерация, г. Москва, Ленинский проспект, 65

<sup>2</sup>Северный (арктический) федеральный университет им. М.В. Ломоносова,  
Российская Федерация, г. Архангельск

<sup>3</sup>Университет Ставангера, Ставангер, Норвегия

*Одним из ключевых параметров, влияющих на технологические показатели разработки месторождений и используемых при создании модели пласта, является абсолютная проницаемость горных пород. Первые важные экспериментальные работы в области определения проницаемости пористой среды были сделаны Ж. Дюпюи (1854), отметивший пропорциональную зависимость между падением давления в фильтре и скоростью фильтрации, и А. Дарси (1856), определившим связь между переменными, действующими при течении жидкости через пористую среду, известную как «линейный закон фильтрации Дарси».*

*Предложенное Форхгеймером классическое уравнение, учитывающее эффект отклонения от линейного закона течения при больших расходах, послужило основой современной технологии определения проницаемости образцов пористой среды, однако оно не учитывает эффект проскальзывания газа, на которое впервые в нефтегазовой науке указал Клинкаенберг.*

\*Автор для переписки. E-mail: anatoly.zolotukhin@gmail.com

Однако при определении истинной проницаемости горных пород необходимо учитывать инерционные эффекты и эффект проскальзывания. Использование нескорректированных значений проницаемости в расчетах скорости течения газа и дебитов газовых скважин может привести к существенным ошибкам и потому может считаться слишком рискованным. Особенно важным становится учет эффекта проскальзывания газа при изучении низкопроницаемых пород.

**КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА:** анализ размерностей, нелинейное течение флюида, число Рейнольдса, лабораторный анализ проницаемости.

## КЕУЕКТІ ОРТАЛАРДАҒЫ ФЛЮИДТАР АҒЫСЫНЫҢ ЖАЛПЫ ТЕҢДЕУІ

**А.Б. ЗОЛОТУХИН**<sup>1,2,3</sup>, техника ғылымдарының докторы, И.М. Губкин атындағы мұнай және газ РМУ (ФЗУ) профессоры; М.В. Ломоносов атындағы Солтүстік (арктикалық) федералды университеті; Ставангер университеті, Ставангер, Норвегия

**В.Е. ШУЛЕВ**<sup>2</sup>, М.В. Ломоносов атындағы Солтүстік (арктикалық) федералды университетінің аспиранты

*Кен орнын игерудің технологиялық көрсеткіштеріне әсер ететін және қабат үлгісін жасау үшін пайдаланылатын негізгі параметрлердің бірі – тау жыныстарының абсолютті өткізгіштігі.*

*Кеуекті ортаны өткізгіштігін анықтау саласындағы бірінші маңызды эксперименталды жұмыстарды, фильтрдегі қысымның төмендеуі мен сүзу жылдамдығы арасындағы пропорционалдық байланысты Ж. Дюпюи (1854) көрсеткен және А. Дарси (1856), сұйықтықтың «Дарси фильтрациясының сызықтық заңы» деп аталатын кеуекті ортаға түсетін кезде жұмыс істейтін айнымалылардың арасындағы байланысты анықтады.*

*Форхгеймер ұсынған, жоғары шығын кезіндегі ағымның сызықтық заңынан ауытқудың әсерін ескеретін классикалық теңдеу, кеуекті ортаның өткізгіштігін анықтауға арналған заманауи технологиялар үшін негіз болды, алайда, ол газды сіңіру әсерін ескермейді деп мұнай-газ саласында алғаш рет Клинкенберг көрсетті.*

*Алайда, жыныстардың шын өткізгіштігін анықтау кезінде инерциялық әсерлерді және газды сіңіру әсерін ескеру қажет.*

*Газ ағынының жылдамдығын және газ ұңғымаларының шығыстарын есепке алуда өткізгіштіктің түзетілмеген мәндерін пайдалану елеулі қателіктерге алып келуі мүмкін және сондықтан тым қауіпті болуы да мүмкін. Әсіресе төмен өткізгішті жыныстарды зерттеген кезде газ шығынының әсерін ескеру өте маңызды.*

**НЕГІЗГІ СӨЗДЕР:** өлшемділікті талдау, флюидтардың сызықты емес ағыны, Рейнольдс саны, өткізгіштіктің зертханалық талдауы.

## A GENERALIZED EQUATION OF FLUID FLOW IN POROUS MEDIA

**A.B. ZOLOTUKHIN**<sup>1,2,3</sup>, Doctor of Engineering, Professor of Gubkin Russian State University of Oil and Gas (National Research University) and Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov; University of Stavanger, Stavanger, Norway

**V.Y. SHULEV**<sup>2</sup>, Ph.D. candidate, Northern (Arctic) Federal University named after M.V. Lomonosov

*One of the key parameters affecting the engineering parameters of field development and used to create a reservoir model is the absolute rock permeability. The first important experimental works in the field of determination of permeability of a porous medium was made by J. Dupuit (1854), who noted the proportional relationship between the pressure drop across filter and the filtration rate, and A. Darcy (1856), who determined the relationship between the variables operating while*

the fluid flowing through a porous medium known as the «Darcy's linear filtration law». Classical Forchheimer equation, which takes into account the effect of nonlinear flow behavior at high flow rates, served as the basis for modern permeability determination of samples of a porous medium, but it does consider the effect of gas slippage, which was for the first time pointed out by Klinkenberg in oil and gas science. However, in determining the intrinsic permeability of rocks, flywheel effects and slippage effect should not be overlooked. The use of uncorrected permeability values in gas velocity and gas-well rates calculation can lead to significant errors and therefore can be considered high-risk. It is especially important to take into account the effect of gas slippage when studying low-permeable rocks.

**KEY WORDS:** *dimensional analysis, nonlinear fluid flotation, Reynold's number, laboratory analysis of permeability.*

**О**пределение абсолютной проницаемости образца пористой среды, основанное на стандартных лабораторных исследованиях, требует особого внимания на стадии обработки экспериментальных данных. Традиционная техника основана на использовании уравнения Форхгеймера [1], учитывающего отклонение от закона Дарси при высоких скоростях течения, вызываемое инерционными силами:

$$|grad p| = \frac{\mu}{k} \cdot u + \beta \cdot \rho \cdot u^2. \quad (1)$$

Из-за сильной сжимаемости газа представляется более удобным выразить градиент давления как функцию массовой скорости течения флюида, поскольку она остается неизменной в направлении течения при установившемся режиме. В целях удобства его использования для оценки проницаемости пористой среды уравнение (1) обычно записывается в следующем виде (2):

$$\frac{M}{Z \cdot R \cdot T \cdot p_m \cdot \mu \cdot \rho \cdot u} \cdot |grad p| = \frac{\beta \cdot \rho \cdot u}{\mu} + \frac{1}{k}, \quad (2)$$

откуда проницаемость  $k$  может быть непосредственно определена.

Хотя уравнение (2) кажется простым соотношением для определения проницаемости, оценка коэффициента  $\beta$  не является такой уж очевидной [2, 3]. Для его определения необходимы данные экспериментов, проведенных при высоких градиентах давлений, т. е. в условиях, когда инерционные силы становятся сопоставимыми с вязкостными силами и когда отклонение от (линейного) закона Дарси становится очевидным и может быть зафиксировано.

Многочисленными экспериментами установлено (например, [2, 3]), что коэффициент  $\beta$  не является константой и может изменять свое значение в тысячи раз в зависимости от типа пористой среды. В ряде литературных источников было также отмечено, что  $\beta$  зависит от пористости и проницаемости и что его определение не является простой задачей [2–12].

Даже когда инерционные эффекты учитываются должным образом, проницаемость пористой среды по газу зависит от средней длины свободного пробега молекул газа, следовательно, среди всего прочего, от абсолютного давления окружающей пористой среды. Этот эффект известен как явление «проскальзывания» газа или

явление сверхпроводимости. Когда этот эффект игнорируется, проницаемость, вычисляемая по уравнению Форхгеймера или закону Дарси (при условии, что инерционное сопротивление ничтожно мало), – выше, чем полученная с использованием инертной жидкости вместо газа. Выраженная в процентах, эта разница невелика для образцов с высокой проницаемостью, но становится все более значимой с уменьшением проницаемости. Это эффект сводится к минимуму с увеличением среднего порового давления при измерении газопроницаемости [14].

Клинкенбергом [15] было показано, что эффект проскальзывания можно учесть путем коррекции замеренного (кажущегося) значения проницаемости следующим образом:

$$k = k_l \cdot \left(1 + \frac{b}{p}\right), \quad (3)$$

где  $k_l$  – истинная проницаемость (по жидкости);  $p$  – среднее поровое давление;  $b$  – коэффициент проскальзывания.

Оценке величины коэффициента  $b$  посвящен целый ряд публикаций [4–6, 14].

### АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

Предположим, что уравнение течения газа может быть записано в терминах тех физических величин (параметров), которые могут быть замерены либо определены и которые перечислены в подавляющем большинстве публикаций, а именно:

градиент давления  $\nabla p$ ; проницаемость породы  $k$ ; кажущаяся скорость течения  $u$ ; вязкость флюида  $\mu$ ; плотность флюида  $\rho$ ; пористость породы  $\phi$ .

Тогда можно записать следующую зависимость, описывающую течение жидкости или газа в пористой среде:

$$\nabla p = f(u, k, \mu, \rho, \phi), \quad (4)$$

Простой анализ размерностей показывает, что только три из четырех параметров, стоящих в правой части соотношения (4), имеют независимую размерность (пористость  $\phi$  не имеет размерности и поэтому не влияет на результат использования анализа размерностей, однако понадобится при проведении некоторых преобразований).

Применение анализа размерностей позволяет получить следующее соотношение:

$$\Pi = f(Re), \quad (5)$$

где безразмерные параметры  $\Pi$  и  $Re$  определены следующим образом:

$$\Pi = \frac{|\nabla p| \cdot k}{u \cdot \mu}; \quad (6)$$

$$Re = \frac{u \cdot \rho \cdot \sqrt{k}}{\mu \cdot \phi^{1.5}}. \quad (7)$$

Заметим, что соотношение (7) определяет макроскопическое число (параметр Рейнольдса  $Re$ ), характеризующее течение флюида через пористую среду, поскольку характеристическая длина здесь представлена квадратным корнем из проницаемости, которая, в свою очередь, является макроскопической величиной. Простая оценка показывает, что для течения газа на небольшом удалении от призабойной зоны значения параметра Рейнольдса, оцененные в соответствии с (7), принимают значения в интервале  $[0, 3]$ , что свидетельствует о том, что в этих областях отсутствует турбулентность. Однако проявление сил, связанных с изменением направления течения из-за извилистости и изменения поперечного сечения поровых каналов (назовем их инерционными), может играть существенную роль, приводя к отклонению реального движения флюида в пористой среде от линейного закона (закона Дарси).

Обычно инерционные потоки связываются с нестационарностью течения, порождающей ускорения. Однако в работе [15] с помощью методов численного моделирования было показано, что явление локальной нестационарности может проявляться в криволинейном участке трубопровода при стационарности всего течения в макромасштабе (т. е. неизменности условий на входе и на выходе из рассматриваемого элемента трубопровода). Очевидно, что в пористой среде такие явления присутствуют повсеместно. Ранее Ruth и Ma [16] приводят пример того, что нелинейность закона фильтрации не обязательно зависит от высоких значений чисел Рейнольдса. Они аргументируют это тем, что в модели, состоящей из прямой трубки, нелинейный эффект явно не выражен при том, что истинная турбулентность устанавливается при  $Re \approx 2000$ , в то время, как в модели с изогнутой трубкой вклад инерционных эффектов становится важным при числе Рейнольдса  $Re \approx 1$ . Таким образом, коэффициент является инерциальным сопротивлением пористой среды вследствие рассеяния энергии, которое происходит из-за множественных изменений направления ускорений молекул флюида при движении через пористую среду по извилистой траектории, которые вызывают спектр вторичного потока с частичным преобразованием энергии в тепло за счет вязкого трения.

Здесь уместно отметить, что закон Дарси в безразмерных параметрах (5)-(7) записывается следующим образом:

$$\Pi = 1 \quad (8)$$

## ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ЛАБОРАТОРНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ

Обычно при проведении стандартных экспериментов по оценке проницаемости кернов по газу оцениваются следующие характеристики породы и используемого в экспериментах газа: вязкость газа, пористость образца породы, его длина и площадь поперечного сечения. В процессе самого эксперимента непрерывно проводятся замеры давления на входе и выходе из образца и расход газа в стандартных условиях. Знание этих величин дает возможность рассчитать среднее давление внутри образца и связанную с ним кажущуюся скорость течения флюида в процессе проведения экспериментов. Единственным параметром, остающимся неизвестным и являющимся целью проведения испытаний, является проницаемость образца.

Использование некоторого наперед заданного значения проницаемости в расчетах безразмерных параметров  $\Pi$  и  $Re$  дают возможность построить график зависимости (5) и, следовательно, «подсмотреть» характер зависимости. Вследствие того, что проницаемость является некоей константой, входящей в соотношение (5), сама зависимость на графике поднимется или опустится в зависимости от выбранного значения проницаемости, в то время как характер зависимости, определяемой замеренными данными, сохранится тем же. Дальнейший анализ полученной зависимости приводит к следующим важным выводам. Так, использование некоторого характерного значения проницаемости  $k_0$  дает возможность рассчитать значения безразмерных параметров  $\Pi_0$  и  $Re_0$  и нанести экспериментальные данные на график в координатах  $\Pi_0$ - $Re_0$ .

### УРАВНЕНИЕ ДЛЯ ВЫСОКИХ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЙ

Как следует из представленных рассуждений, все экспериментальные данные образуют линейную зависимость  $\Pi_0 = f_0(Re_0)$  при высоких значениях параметра Рейнольдса  $Re_0$ , т.е.

$$\Pi_0 = c + a \cdot Re_0, \quad (9)$$

где константы  $c$  и  $a$  пока не определены.

Из (9), в частности, следует, что  $\Pi_0 \rightarrow c$  при  $Re_0 \rightarrow 0$ . С другой стороны, при низких значениях параметра Рейнольдса инерционные силы перестают играть хоть сколь-нибудь существенную роль, и уравнение течения газа должно приближаться к закону Дарси. Это означает, что использование различных (случайных) значений проницаемости образца, как было отмечено выше, привело бы к появлению различных значений коэффициента  $c$ , что означает, что единственно правильное значение проницаемости может быть получено при условии  $c = 1$ .

Это замечание позволяет записать уравнение течения газа в пористой среде в виде:

$$\Pi = 1 + a \cdot Re. \quad (10)$$

Основываясь на полученных результатах, можно построить несложную процедуру определения величины коэффициента и истинного значения проницаемости пористой среды  $k_i$  [17].

*Рисунок 1* иллюстрируют графический способ нахождения значений  $a$  и  $k_i$ .

Как следует из графиков, прямая линия, проведенная через точки, соответствующие высоким значениям параметра Рейнольдса, пересекает ось  $\Pi$  при значении  $\Pi=1$  и, следовательно, удовлетворяет уравнению (9).

Стоит отметить, что для надежного определения проницаемости необходимо проведение серии экспериментов (т.е. замера нескольких точек) в области относительно высоких градиентов давления, т.е. в области, где отчетливо проявляются силы инерции.

Согласно ГОСТ 26450.2-85 [18], регламентирующему порядок проведения исследований по определению газопроницаемости, максимальный перепад давления,

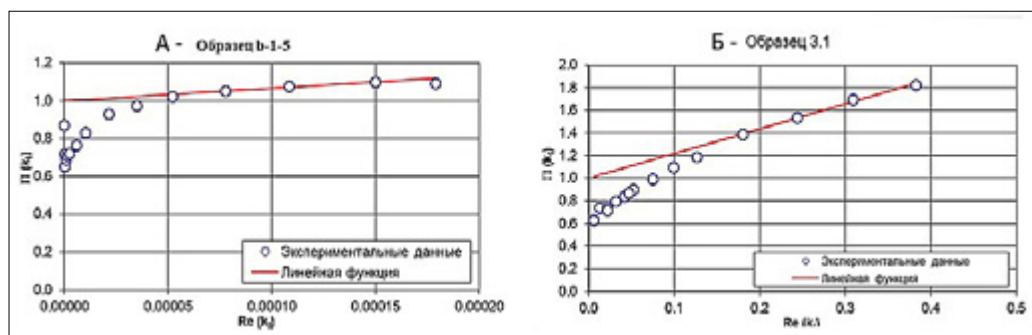


Рисунок 1 – Зависимость  $\Pi(k)=f(Re(k))$  для образцов А (b-1-5,  $k_f=0,23$  мд) и Б (3.1,  $k_f=135,88$  мд)

создаваемого в исследуемом образце, может достигать 3 МПа. При таких значениях перепада давления экспериментальные данные, записанные в координатах  $\Pi_0-Re_0$  находятся в области резкого возрастания функции  $\Pi_0=f(Re_0)$ , что может привести значительную погрешность в результаты определения проницаемости. Для повышения точности определения в проведенных исследованиях перепад давлений между входным и выходным торцами образцов достигал 20 МПа. При таких значениях функция  $\Pi_0=f(Re_0)$  «выполаживается», что позволяет построить прямолинейный участок зависимости  $\Pi=1+\alpha \cdot Re$ .

### УРАВНЕНИЕ ДЛЯ НИЗКИХ ГРАДИЕНТОВ ДАВЛЕНИЙ

Как следует из рисунка 1, при низких градиентах давления течение газа перестает следовать соотношению (10). Это отклонение обусловлено так называемым эффектом проскальзывания газа, впервые описанным Клинкабергом [13].

Для учета эффекта проскальзывания нами предложено использовать следующую аппроксимацию:

$$\Pi = 1 + a \cdot Re - \exp(-b \cdot Re^\gamma), \quad (11)$$

где  $a, b$  и  $\gamma$  являются константами, подлежащими определению.

Представление уравнения (11) в размерной форме:

$$\frac{k}{\mu} |gradp| = u + a \frac{\rho\sqrt{k}}{\mu\phi^{1.5}} u^2 - u \cdot \exp(-b \left(\frac{\rho\sqrt{k}}{\mu\phi^{1.5}} u\right)^\gamma), \quad (12)$$

в явной форме указывает на нелинейность течения газа при низких и высоких градиентах давления.

Расчеты показывают (рисунки 2), что уравнения (11–12) с высокой точностью описывают экспериментальные данные в широком диапазоне изменения параметра Рейнольдса и правильно описывает нелинейный закон течения газа как при высоких градиентах давления (существенное влияние инерционных сил), так и при низких градиентах давления (эффект Клинкенберга).

В области высоких градиентов давления слагаемое в (12), содержащее экспо-



ненту, становится бесконечно малым в сравнении с двумя первыми слагаемыми в правой части уравнения, что позволяет использовать следующую аппроксимацию:

$$|grad p| = \frac{\mu}{k} u + a \frac{\rho}{\sqrt{k} \phi^{1.5}} u^2 \quad (13)$$

При низких градиентах давления скорость течения становится малой, что дает следующий результат:

$$|grad p| = a \frac{\rho}{\sqrt{k} \cdot \phi^{1.5}} u^2 + b \frac{\rho^\gamma}{\phi^{1.5\gamma} \cdot k^{1-\frac{\gamma}{2}}} u^{1+\gamma} \mu^{1-\gamma} \quad (14)$$

Последнее соотношение иллюстрирует известный и теоретический доказанный результат, что при низких средних давлениях (и, следовательно, при низких градиентах давления) вязкость газа перестает играть важную роль и практически «исчезает» из уравнения движения.

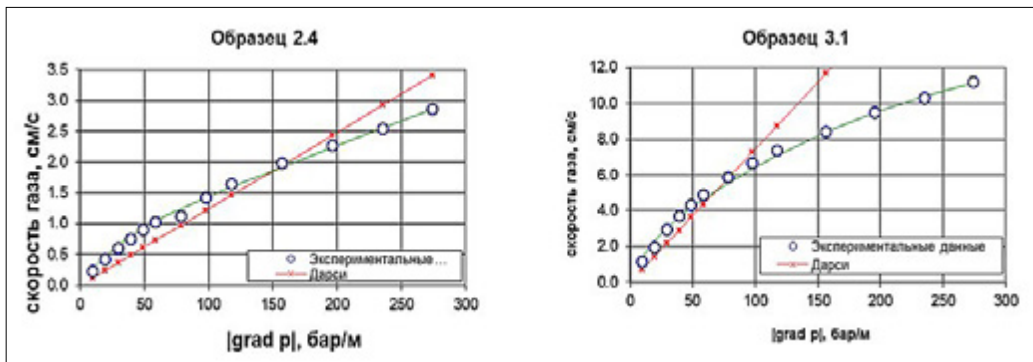


Рисунок 2 – Зависимость  $\Pi(k)=f(Re(k))$  для образцов 2.4 ( $k_f=22,65$  мд) и 3.1 ( $k_f=135,88$  мд)


Заметим, что коэффициент  $a$  может быть определен в процессе лабораторных экспериментов при больших градиентах давления, а  $b$  и  $\gamma$  – при малых.

Применение уравнения Форхгеймера для измерения проницаемости с использованием стандартных процедур в расчетах может приводить к ошибочной оценке проницаемости [17]. В большинстве случаев измерения проницаемости происходят в области низких скоростей течения газа, когда инерционные силы не оказывают значительного эффекта на результат, в то время как уравнение Форхгеймера было предложено для высокоскоростных случаев, поэтому оно не может быть [успешно] применено для анализа полученных данных.

Как показано в работе, уравнение (12) является более предпочтительным в случае широкого диапазона изменения градиентов давления.

Таким образом, на основе изучения экспериментальных данных с помощью анализа размерностей получено уравнение течения газа в пористой среде (12), которое учитывает эффект проскальзывания газа (в области низких скоростей) и влияние инерционных сил (при высоких скоростях движения газа).



Применение этого уравнения позволяет точнее и методологически более правильно оценить истинную проницаемость образца на основе стандартной методики. 

### ЛИТЕРАТУРА

- 1 Forchheimer P. Wasserbewegung durch Boden. Zeit ver Deutsch Ing., 1901.
- 2 Tessem R. High Velocity Coefficient's Dependence on Rock Properties: A Laboratory Study. Thesis Work, NTH, Trondheim, 1980.
- 3 Torsæter O., Tessem R., Berge B. High Velocity Coefficient's Dependence on Rock Properties, SINTEF report, NTH Trondheim, 1981.
- 4 Heid J.G., McMahon J.J., Nielsen R.F., Yuster, S.T. Study of the Permeability of Rocks to Homogenous Fluids, API Drill. and Prod. Practice, 1950.
- 5 Jones F.O., Owens, W.W. A Laboratory Study of Low-Permeability Gas Sands, JPT, Sep. 1980, P. 1631–1640.
- 6 Geerstma J. Estimating the coefficient of inertial resistance in fluid flow through porous media, SPEJ, 1974, P. 445–450.
- 7 Skjetne E. High-velocity flow in porous media: analytical, numerical and experimental studies. Doktor ingeniøravhandling 1995: 119, Dept. of Petroleum Engineering and Applied Geophysics, Norwegian Institute of Technology, Univerdsity of Trondheim, 1995.
- 8 Firoozabadi A., Katz D.L.: An Analysis of High-Velolcity Gas Flow Through Porous Media, JPT, Feb., 1979, P. 211–216.
- 9 Johnson T.W., Taliaferro, D.B. Flow of Air and Natural Gas Through Porous Media, Technical Paper 592, USBM, 1938.
10. Cornell D., Katz D.L. Flow of Gases Through Consolidated Porous Media, Ind. and Eng. Chem., Oct. 1953, 45, 2145.
- 11 Katz D.L., Cornell D., Kobayashi R., Poettman F.H., Vary J.A., Elenbaas J.R., Weinaug C.F. Handbook of Natural Gas Engineering, McCraw-Hill Book Co. Inc., New-York, 1959.
- 12 Janicek J.D., Katz D.L. Application of Unsteady State Gas Flow Calculations, Paper presented at research conference, U. of Michigan, Ann Arbor, June 20, 1955.
- 13 Klinkenberg, L.J. Permeability of Porous Media to Liquids and Gases, API Drill. and Prod. Practice, 1941.
- 14 Zolotukhin, A.B. and Ursin, J.-R. Introduction to Petroleum Reservoir Engineering, Norwegian Academic Press, Kristiansand, (2000), 407 p.
- 15 Колосов С.М., Русяк И.Г. Численное моделирование течения несжимаемой жидкости в канале с криволинейной образующей // Вестник ТОГУ.– 2008.– № 1.– С. 61–74.
- 16 Ruth D., Ma H. On the Derivation of the Forchheimer Equation by Means of the Average Theorem// Transport in Porous Media. – 1992. – No. 3.– P. 255–264.
- 17 Золотухин А.Б. Уравнение фильтрации газа в пористых средах и техника определения проницаемости пористой среды. Доклад на международной конференции. ТатНИПИнефть. Бугульма. 25–26 апреля, 2006 г.
- 18 Породы горные. Методы определения коллекторских свойств. Метод определения коэффициента абсолютной газопроницаемости при стационарной и нестационарной фильтрации. ГОСТ 26450.2-85.